

## OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapă locală – 28 februarie 2016 ,

Clasa a XII-a

**Problema 1:** Să se calculeze:

$$\int \frac{x^{3p+5} + x^{3p+1} + x^{p+5} + x^{p+1} + x^6 + 1}{(x^{p+7} + x^{p+1})(x^{2p+1})} dx, \text{ cu } x > 0 \text{ și } p \in \mathbb{N}^*.$$

Paul Băiatu, Giurgiu

**Problema 2:** Se consideră funcția  $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(\cos x + \sin x)^n}{(\cos x - \sin x)^{n+2}}$  unde  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se determine primitiva  $F: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f$  cu proprietatea că  $F(0) = \frac{1}{2(n+1)}$ . Calculați, apoi, imaginea funcției  $F$ .

Stelian Piscan, Giurgiu

**Problema 3:** a) Fie  $f: G_1 \rightarrow G_2$  un morfism de grupuri și  $\text{Ker}(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\}$ , unde am notat cu  $e_2$  elementul neutru al grupului  $G_2$ . Demonstrați că  $f$  este morfism injectiv dacă și numai dacă  $\text{Ker}(f) = \{e_1\}$ , unde am notat cu  $e_1$  elementul neutru al grupului  $G_1$ .

b) Fie  $f: (Z_p, +) \rightarrow G$  un morfism neinjectiv de grupuri, unde  $p$  este un număr prim. Demonstrați că  $|\text{Im}(f)| = 1$ . (S-a notat cu  $\text{Im}(f)$  imaginea morfismului  $f$ )

Daniel Bănarău, student Universitatea București

**Problema 4:**

Pe mulțimea  $G = (7, \infty)$  se definește legea  $x \circ y = 7 + (x - 7)^{\lg(y-7)}$ . Arătați că legea este asociativă, comutativă și că admite element neutru. Precizați elementele nesimetrizabile în raport cu legea dată.

\*\*\*